$$\frac{\bar{Y}_{\cdot u}-\bar{Y}_{\cdot v}-(\mu_u-\mu_v)}{\sqrt{MS_{reg}\left(\frac{1}{n_u}+\frac{1}{n_v}\right)}} \sim t_{n-r}$$

$(1-a)100\%$ ΔΕ για $\mu_u-\mu_v$: $\bar{Y}_{\cdot u}-\bar{Y}_{\cdot v} \pm t_{a/2,\,n-r}\sqrt{MS_{reg}\left(\frac{1}{n_u}+\frac{1}{n_v}\right)}$

Στο παράδειγμα της ΑΒΕΖ μας ενδιαφέρει $H_0: \mu_3-\mu_4=0$ v $H_a: \mu_3-\mu_4\neq 0$

$u=3$, $v=4$, $n_3=3$, $n_4=2$, $\bar{Y}_{\cdot 3}=19$, $\bar{Y}_{\cdot 4}=27$

$MS_{reg}=7{,}67$

$$t=\frac{19-27}{\sqrt{7{,}67\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}}=-3{,}164$$

Κρίσιμη περιοχή $|t|\geq t_{a/2,\,n-r}\overset{a=0{,}05}{=}t_{0{,}025,6}=2{,}447$

Άρα απορρίπτουμε την H_0

11/5/2016

Ασκήσεις για επανάληψη άσκηση 3

τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_6 \sim N(0,1)$

$$Z_1=\frac{X_1+X_2}{2},\quad Z_2=\frac{X_3+\dots+X_6}{4},\quad Z_3=\frac{\sqrt{2}\,(X_1+X_2)}{\sqrt{(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2}},$$

$$Z_4=\frac{(X_1-X_6)^2+(X_2-X_5)^2+(X_3-X_4)^2}{2}$$

α) Να βρεθούν οι κατανομές των: i) $\frac{Z_1+Z_2}{2}$, ii) $2Z_1^2+4Z_2^2$, iii) Z_3-Z_2, iv) Z_3, v) Z_4

β) Να βρεθούν οι σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε:

i) $P(Z_3\geq -c_1)=0{,}99$, ii) $P(Z_4\leq c_2)=0{,}99$

α) i) $\frac{Z_1+Z_2}{2} \sim ;$

$$X_1+X_2 \sim N(0+0, 1^2+1^2) = N(0,2) \Rightarrow$$

$$\frac{X_1+X_2}{2} \sim N(0/2, 2/2^2) = N(0, \tfrac{1}{2})$$

$$X_3+\dots+X_6 \sim N(0+\dots+0, 1+1+1+1) = N(0,4) \Rightarrow$$

$$\frac{X_3+\dots+X_6}{4} \sim N(0, \tfrac{4}{16}) = N(0, \tfrac{1}{4})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{Z_1+Z_2}{2} \sim N\left(0+0; \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\right) = N(0, \tfrac{3}{16})$$

ii) $2Z_1^2 + 4Z_2^2 \sim ;$

$$Z_1 \sim N(0, \tfrac{1}{2}) \Rightarrow \frac{Z_1-0}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \sim N(0,1)$$

$$Z_2 \sim N(0, \tfrac{1}{4}) \Rightarrow \frac{Z_2-0}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow$ ~~$\frac{Z_1^2}{\frac{1}{2}} \sim X_1^2 \Rightarrow 2Z_1^2 \sim X_1^2$~~, ~~$\frac{Z_2^2}{\frac{1}{4}} \sim X_1^2 \Rightarrow 4Z_2^2 \sim X_1^2$~~

$$\left(\frac{Z_1}{\sqrt{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{Z_2}{\sqrt{1/4}}\right)^2 \sim X_2^2 \Rightarrow 2Z_1^2 + 4Z_2^2 \sim X_2^2$$

iii) $X_3 - Z_2 \sim ;$

$$Y = X_3 - Z_2 \sim N(0, \tfrac{3}{4})$$

γιατί $E(X_3 - Z_2) = 0$ αλλά X_3, Z_2 όχι ανεξάρτητες οπότε.

$Var(X_3 - Z_2) = \frac{3}{4}$

αφού $Y = X_3 - Z_2 = X_3 - \frac{X_3+X_4+X_5+X_6}{4} = \frac{3X_3}{4} - \frac{X_4+X_5+X_6}{4}$

οπότε: $Var(Y) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 Var(X_3) + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \left(Var(X_4) + Var(X_5) + Var(X_6)\right) =$

$$= \frac{9}{16}1 + \frac{1}{16}(1+1+1) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Λάθος τρόπος: $\cancel{Var\,Y = 1 - \frac{4}{16} = 12/16}$

iv) $Z_3 \sim\,;$

$X_1 - X_2 \sim N(0-0, 1+1) = N(0,2) \Rightarrow$

$$\frac{X_1 - X_2 - 0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

$X_3 - X_4 \sim N(0,2) \Rightarrow \frac{X_3 - X_4}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$X_5 - X_6 \sim N(0,2) \Rightarrow \frac{X_5 - X_6}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow$

$$\frac{(X_3 - X_4)^2}{2} + \frac{(X_5 - X_6)^2}{2} \sim \chi^2_2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\frac{(X_5-X_6)^2 + (X_3-X_4)^2}{2}}{2}}} \sim t_2 \Rightarrow Z_3 \sim t_2$$

$\cancel{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \cancel{\frac{2}{\sqrt{2}}}$

$$\frac{\sqrt{2}(X_1 - X_2)}{\sqrt{(X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2}}$$

a) i) $\frac{Z_1+Z_2}{2} \sim ;$

$X_1+X_2 \sim N(0+0, 1^2+1^2) = N(0,2) \Rightarrow$

$\frac{X_1+X_2}{2} \sim N(0/2, 2/2^2) = N(0, \frac{1}{2})$

$X_3+\dots+X_6 \sim N(0+\dots+0, 1+1+1+1) = N(0,4) \Rightarrow$

$\frac{X_3+\dots+X_6}{4} \sim N(0, \frac{4}{16}) = N(0, \frac{1}{4})$

$\frac{Z_1+Z_2}{2} \sim N\left(0+0; \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\right) = N(0, \frac{3}{16})$

ii) $2Z_1^2+4Z_2^2 \sim ;$

$Z_1 \sim N(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{Z_1-0}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \sim N(0,1)$ $\Rightarrow$ $\frac{Z_1^2}{\frac{1}{2}} \sim X_1^2 \Leftrightarrow 2Z_1^2 \sim X$

$Z_2 \sim N(0, \frac{1}{4}) \Rightarrow \frac{Z_2-0}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \sim N(0,1)$ $\frac{Z_2^2}{\frac{1}{4}} \sim X_1^2 \Rightarrow 4Z_2^2 \sim X_1^2$

$\left(\frac{Z_1}{\sqrt{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{Z_2}{\sqrt{1/4}}\right)^2 \sim X_2^2 \Rightarrow 2Z_1^2 + 4Z_2^2 \sim X_2^2$

iii) $X_3 - Z_2 \sim ;$

$Y = X_3 - Z_2 \sim N(0, \frac{3}{4})$

γιατί $E(X_3-Z_2) = 0$ αλλά X_3, Z_2 όχι ανεξάρτητες οπότε

$Var(X_3-Z_2) = \frac{3}{4}$

α, v) $Z_4 \sim$;

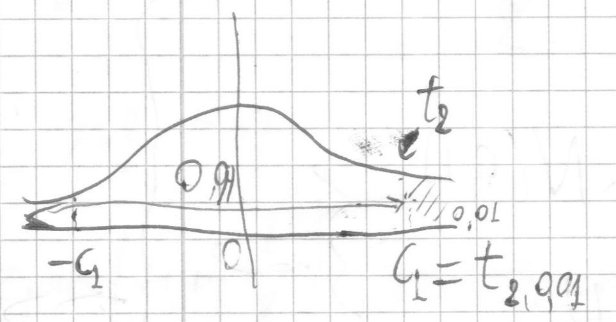
$$\frac{X_1-X_6}{\sqrt{2}}, \quad \frac{X_2-X_5}{\sqrt{2}}, \quad \frac{X_3-X_4}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{(X_1-X_6)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{(X_2-X_5)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{(X_3-X_4)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2_3 \Rightarrow$$

$$Z_4 \sim \chi^2_3$$

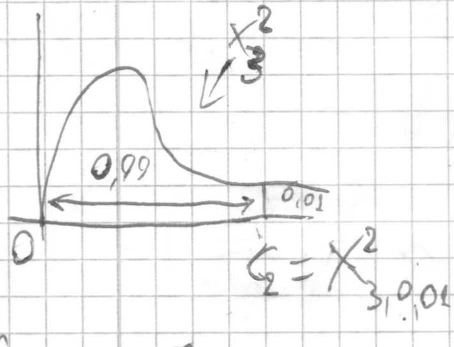
β) i) $P(Z_3 \geq -c_1) = 0,99 \Rightarrow$

$$P(t_2 \geq -c_1) = 0,99 = P(t_2 \leq c_1)$$



άρα $c_1 = 6,965$

ii) $P(Z_4 \leq c_2) = 0,99 \Rightarrow P(\chi^2_3 \leq c_2) = 0,99 \Rightarrow$



$c_2 = 11,345$

Άσκηση 6

i) τδ. $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$

$$P\left(\left|\frac{S}{\bar{X}}\right| \leq c\right) = 0,05 \quad c = ;$$

$$P\left(\left|\frac{S}{\overline{X}}\right| \leq c\right) = 0{,}05 \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{S^2}{\overline{X}^2} \leq c^2\right) = 0{,}05$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$$

$$\overline{X} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\overline{X}^2}{\sigma^2/n} \sim X^2_1$$

Άρα
$$\frac{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)}{\dfrac{\overline{X}^2}{\sigma^2/n} \Big/ 1} \sim F_{n-1,1} \Rightarrow$$

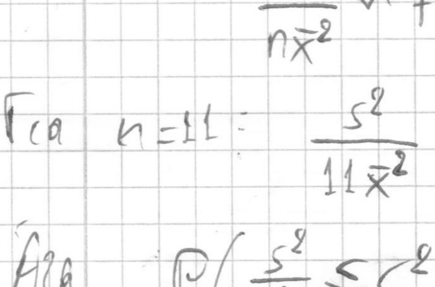
$$\frac{S^2}{n\overline{X}^2} \sim F_{n-1,1}$$

Για $n=11$: $\dfrac{S^2}{11\overline{X}^2} \sim F_{10,1}$

Άρα $P\left(\dfrac{S^2}{\overline{X}^2} \leq c^2\right) = 0{,}05 \rightarrow P\left(\dfrac{S^2}{11\overline{X}^2} \leq \dfrac{c^2}{11}\right) = 0{,}05 \Rightarrow$

$$P\left(F_{10,1} \leq \frac{c^2}{11}\right) = 0{,}05 \Rightarrow$$

$$\frac{c^2}{11} = F_{10,1,0,05} = \frac{1}{F_{1,10,0,05}} = \frac{1}{4{,}96} \overset{c>0}{\Longrightarrow}$$



$c = 1{,}489$

Έστω τδ $X_1, X_2, \dots, X_{48}$ από $f_X(x) = 2(1-2|x|), -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα περισσότερες από τριάντα μετρήσεις να βρίσκονται στο διάστημα $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$:

Έστω Y = αριθμός των μετρήσεων στο $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ τότε:

$$Y \sim B(n=48, \ p = P(E) = P(-\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{4})$$

$$p = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f_X(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} 2(1-2|x|)\,dx = \dots = \frac{3}{4}$$

άρα $Y \sim B(n=48, p=\frac{3}{4}$

Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα :

$$P(Y>40) = P(41 \leq Y \leq 48)$$

το ακριβές αποτέλεσμα είναι:

$$P(Y>40) = \sum_{x=41}^{48} \binom{48}{x} \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{48-x}$$

προσεγγιστικά :

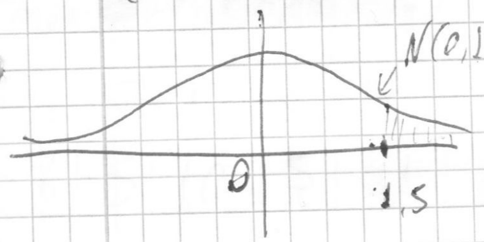
$$P(Y>40) \approx P\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{διόρθωση} \\ \text{συνέχειας}}}{Y \geq 40{,}5} \;\middle|\; Y \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(np=36, \sigma^2 = np(1-p)=9)\right) =$$

$$= P(Y \geq 40{,}5 \mid Y \sim N(36,9)) =$$

$$= P\left(\frac{Y-36}{3} \geq \frac{40{,}5-36}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{40{,}5-36}{3} \;\middle|\; Z \sim N(0,1)\right) =$$

$$= P(Z \geq 1{,}5 \mid Z \sim N(0,1)) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 1{,}5) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668$$



Άσκηση 4.16

Δύο Μηχανές M_1 και M_2. $n_1 = 100$ παρατηρήσεις, $n_2 = 100$ παρατηρήσεις

$\overline{X}_1 = 1{,}07$, $\overline{X}_2 = 1{,}18$, $\underbrace{\sigma_1 = 0{,}10, \ \sigma_2 = 0{,}12}_{\text{(μη γνωστές)}}$

α) Υπάρχει διαφορά; Για $\alpha = 0{,}05$

β) Ισχύς του τεστ όταν μ_1 είναι κατά δ πιο > μ_2

α) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \vee \quad H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Επειδή έχουμε μεγάλα δείγματα μπορούμε να πάμε προσεγγιστικά με το κεντρικό οριακό θεώρημα:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)$$

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1) \text{ όταν } H_0 \text{ αληθής}$$

Κρίσιμη περιοχή: $|Z| \geq Z_{\alpha/2} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$

Είναι $Z = \dfrac{1{,}07 - 1{,}18}{\sqrt{\frac{0{,}10^2}{100} + \frac{0{,}12^2}{100}}} = -7{,}042$ επειδή $7{,}042 > 1{,}96$ απορρίπτεται η H_0

άρα οι M_1, M_2 δε ~~δεν~~ λειτουργούν ομοιόμορφα β) Ισχύς $= \gamma = 1-\beta$

~~β = P([illegible]~~

$\beta = P($ δεχόμαστε την $H_0 \mid H_a$ αληθής $)$

$H_0: \mu_1-\mu_2=0 \quad V \quad H_a: \mu_1-\mu_2=\delta>0$

Άρα $\beta = P\left(-1,96 \le Z = \dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} \le 1,96 \;\middle|\; \mu_1-\mu_2=\delta\right) =$

$$= P\left(-1,96 - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} \le \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-\delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} \le 1,96 - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\right) =$$

$$= P\left(-1,96 - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{0,10^2}{100}+\frac{0,12^2}{100}}} \le Z \le 1,96 - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{0,10^2}{100}+\frac{0,12^2}{100}}}\right) =$$

$$= P\left(-1,96 - \frac{\delta}{0,0156} \le Z \le 1,96 - \frac{\delta}{0,0156} \;\middle|\; Z \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)\right) =$$

$$= \Phi\left(1,96 - \frac{\delta}{0,0156}\right) - \Phi\left(-1,96 - \frac{\delta}{0,0156}\right)$$ αθροιστική συνάρτηση της $N(0,1)$